

Ondes électromagnétiques et conducteurs

1. Onde électromagnétique dans un conducteur ohmique

1.a. Équation de propagation

On s'intéresse au champ électromagnétique dans un conducteur métallique. Le champ électromagnétique dans la matière condensée est fortement influencé par les atomes et molécules car ceux-ci peuvent posséder un moment dipolaire électrique ou magnétique. Le champ électromagnétique à l'échelle microscopique, soumis à l'effet des atomes et molécules, est très fluctuant spatialement, ce qui nécessite de définir un champ électromagnétique moyen à une échelle mésoscopique. Dans le cas d'un métal atomique non magnétique (par ex. l'aluminium ou le cuivre), on admettra que ce champ moyen obéit (en première approximation) aux équations de Maxwell déjà énoncées :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

On suppose de plus que la loi d'Ohm locale est vérifiée :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (5)$$

La conductivité γ est une constante. La loi d'Ohm écrite sous cette forme est valable pour les métaux dans le domaine des radio-fréquences et des micro-ondes. Dans le domaine des térahertz et des infrarouges, il est possible d'écrire une loi d'Ohm locale mais en régime sinusoïdal seulement et pour des champs complexes, avec une conductivité qui dépend de la pulsation.

Compte tenu de la linéarité des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm, l'étude peut être faite en régime sinusoïdal de pulsation ω . Avec la convention $\exp(-i\omega t)$, la forme locale de conservation de la charge s'écrit :

$$\gamma \operatorname{div}(\vec{E}) - i\omega \rho \quad (6)$$

$$\left(\frac{\gamma}{\epsilon_0} - i\omega \right) \rho = 0 \quad (7)$$

On en conclut que la densité de charge volumique est nulle dans un milieu ohmique (mais cela n'exclut pas la présence de charges sur la surface des conducteurs). La seule équation de Maxwell différente de celle du vide est donc l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (8)$$

Le terme de droite comporte entre parenthèse le courant de conduction et un terme homogène à une densité de courant, appelé *courant de déplacement*. Pour comparer ces deux termes, on se place en régime sinusoïdal permanent :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\gamma - i\omega\epsilon_0) \vec{E} \quad (9)$$

Écrite sous cette forme, l'équation de Maxwell-Ampère est plus générale que sous sa forme initiale, car il est alors possible d'introduire une conductivité qui dépend de la pulsation. Néanmoins, cela n'est pas nécessaire dans le domaine des radio-fréquences. Pour un métal dans le domaine des radio-fréquences et des micro-ondes, la conductivité est celle que l'on mesure à très basse fréquence. On peut alors appliquer l'approximation suivante :

$$\epsilon_0\omega \ll \gamma \quad (10)$$

Le courant de déplacement est très largement négligeable par rapport au courant de conduction, et l'équation de Maxwell peut s'écrire sous sa forme approximative (régime quasi stationnaire) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0\gamma \vec{E} \quad (11)$$

En éliminant le champ magnétique des équations de Maxwell, on obtient l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (12)$$

Cette équation à dérivées partielles est tout à fait différente de l'équation des ondes (équation de d'Alembert), car la dérivée temporelle est une dérivée première. Elle est appelée *équation de diffusion*. On la retrouve par exemple dans les phénomènes de diffusion de particules ou de diffusion thermique.

En régime sinusoïdal, l'équation s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0\gamma \vec{E} \quad (13)$$

1.b. Effet de peau

On recherche une solution de l'équation précédente sous la forme d'une onde plane monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (14)$$

On obtient :

$$k^2 = i\omega\mu_0\gamma \quad (15)$$

Le nombre d'onde k est donc complexe. Les deux solutions sont :

$$\alpha = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0\gamma} = \pm \frac{1+i}{\delta} \quad (16)$$

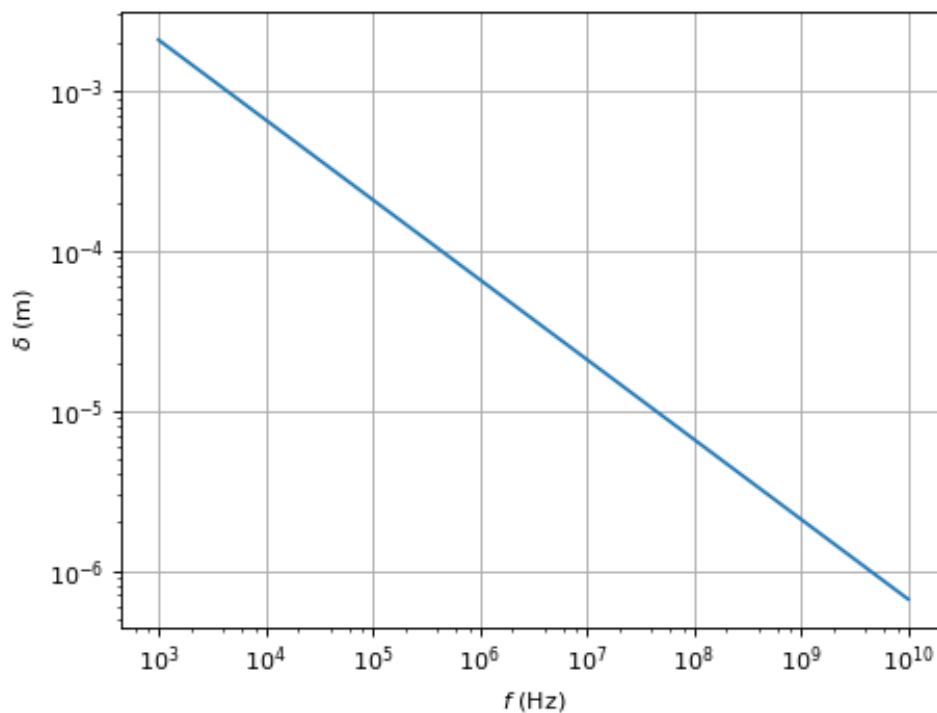
où l'on a introduit la longueur suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}} \quad (17)$$

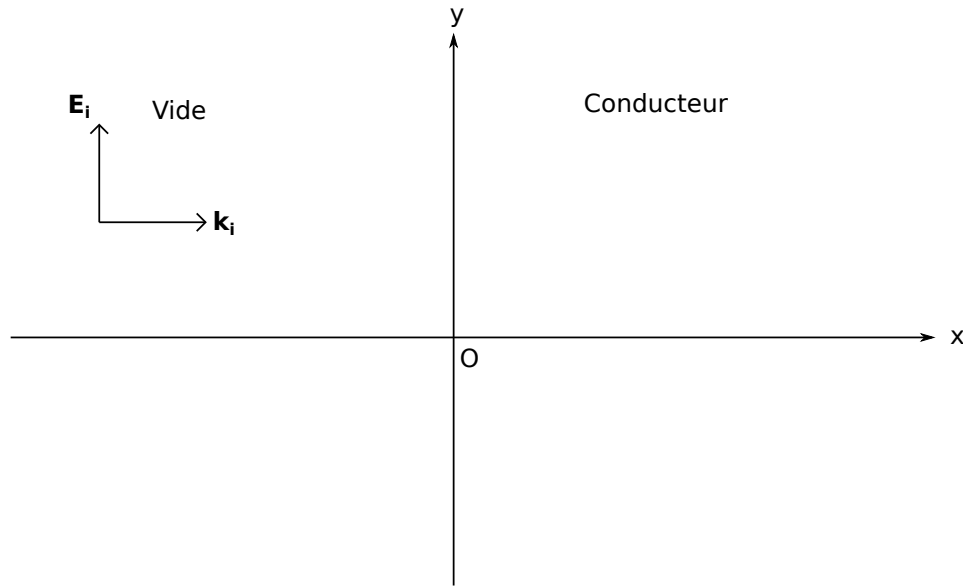
Voyons la valeur de cette longueur en fonction de la fréquence pour le cuivre :

```
from matplotlib.pyplot import *
import numpy
import math

gamma = 5.8e7
mu0=4*math.pi*1e-7
f = numpy.logspace(3,10)
delta = numpy.sqrt(2.0/(mu0*gamma*2*math.pi*f))
figure()
plot(f,delta)
xlabel(r'$f$ (\rm Hz)$')
ylabel(r'$\delta$ (\rm m)$')
xscale('log')
yscale('log')
grid()
```



Considérons le cas d'onde plane progressive monochromatique se propage dans le vide et qui rencontre en incidence normale la surface plane d'un conducteur.



Si l'onde incidente est polarisée rectilignement, dans la direction y , il en est de même pour l'onde dans le conducteur. La solution générale dans le conducteur ($x > 0$) est une combinaison linéaire des deux solutions obtenues précédemment.

$$\underline{E}_y(x, t) = E_1 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)} + E_2 e^{x/\delta} e^{i(-x/\delta - \omega t)} \quad (18)$$

Lorsque x tend vers l'infini, le deuxième terme tend vers l'infini. Si le conducteur a une épaisseur très grande devant δ , on doit éliminer cette possibilité et poser $E_2 = 0$. Le champ réel est donc :

$$E_y(x, t) = E_1 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) \quad (19)$$

L'onde obtenue est une *onde évanescente* : son amplitude décroît de manière exponentielle avec la profondeur dans le métal. Le champ est pratiquement nul dès que $x > 5\delta$. La longueur δ est donc la *profondeur de pénétration de l'onde* dans le conducteur. Elle est d'autant plus faible que la fréquence est élevée et que la conductivité est grande. Pour un métal, elle est de l'ordre du micromètre à la fréquence de 1 GHz. D'une manière générale, les champs électromagnétiques de grande fréquence ne peuvent entrer à l'intérieur des conducteurs et restent confinés au voisinage de la surface. Ce phénomène est appelé *effet de peau*.

La densité de courant électrique est obtenue avec la loi d'Ohm :

$$j_y(x, t) = \gamma E_1 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) \quad (20)$$

La densité de puissance dissipée dans le conducteur (effet Joule) est, en moyenne temporelle :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \gamma E_1^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} \quad (21)$$

La puissance moyenne dissipée par unité de surface de conducteur est :

$$\langle P \rangle = \int_0^{\infty} \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle dx = \frac{1}{4} \gamma \delta E_1^2 \quad (22)$$

Pour une onde incidente d'amplitude E_0 , le calcul de l'amplitude E_1 nécessite de calculer le champ magnétique dans le métal, de prendre en compte l'onde réfléchie, et d'écrire la continuité des champs à la surface du métal. La simulation [Réflexion sur un conducteur](#) montre l'onde dans le métal en fonction du rapport δ/λ . Lorsque ce rapport tend vers zéro, le coefficient de réflexion en puissance tend vers 1.

1.c. Conducteur parfait

La modélisation des problèmes d'électromagnétisme peut être notablement simplifiée en introduisant la notion de conducteur parfait.

Un conducteur parfait a une conductivité infinie. La profondeur de pénétration du champ est donc nulle.

Dans un conducteur parfait, le champ électrique et le champ magnétique sont nuls. La densité de courant volumique et la densité de charge sont aussi nulles.

Le courant électrique est confiné sur une épaisseur nulle, sur la surface du conducteur. Ce type de courant est appelé *courant de surface*.

Pour le problème précédent, la relation (22) pourrait laisser croire que la puissance dissipée tend vers l'infini lorsque la conductivité tend vers l'infini. Comme nous le verrons plus loin, la puissance dissipée tend au contraire vers zéro (car E_1 tend vers zéro).

Il n'y a pas de puissance dissipée dans un conducteur parfait, car le courant reste localisé sur sa surface.

Pour les conducteurs métalliques à température ordinaire, le modèle du conducteur parfait est une approximation qui permet de simplifier les calculs. Les *supraconducteurs* sont des matériaux qui peuvent avoir une conductivité effectivement infinie lorsque la température est assez basse (de quelques Kelvins à une centaine de Kelvins pour les supraconducteurs haute température).

Pour modéliser le courant surfacique sur la surface d'un conducteur parfait, on introduit une densité de courant de surface. En reprenant l'exemple précédent, la densité de courant surfacique est définie (pour une conductivité finie) par :

$$j_{sy}(t) = \int_0^\infty j_y(x, t) dx \quad (23)$$

La densité de courant surfacique est donc en A/m . Pour un conducteur parfait, la densité de courant volumique tend vers l'infini mais se localise sur une épaisseur nulle, si bien que la densité de courant surfacique est non nulle. Dans le cas général, la densité de courant surfacique est un vecteur défini en tout point de la surface et tangent à cette surface.

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul. Sur la surface du conducteur parfait, le champ n'est pas nécessairement nul. Les relations de passage, données en annexe, permettent d'exprimer le champ électrique sur la surface du conducteur parfait :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (24)$$

où σ est la densité surfacique de charge au point considéré et \vec{n} le vecteur normal unitaire sortant du conducteur. Le champ électrique est donc perpendiculaire à la surface et son intensité est proportionnelle à la densité de charge.

Le champ magnétique est nul à l'intérieur du conducteur parfait. Sur sa surface, il est lié au courant surfacique par la relation suivante :

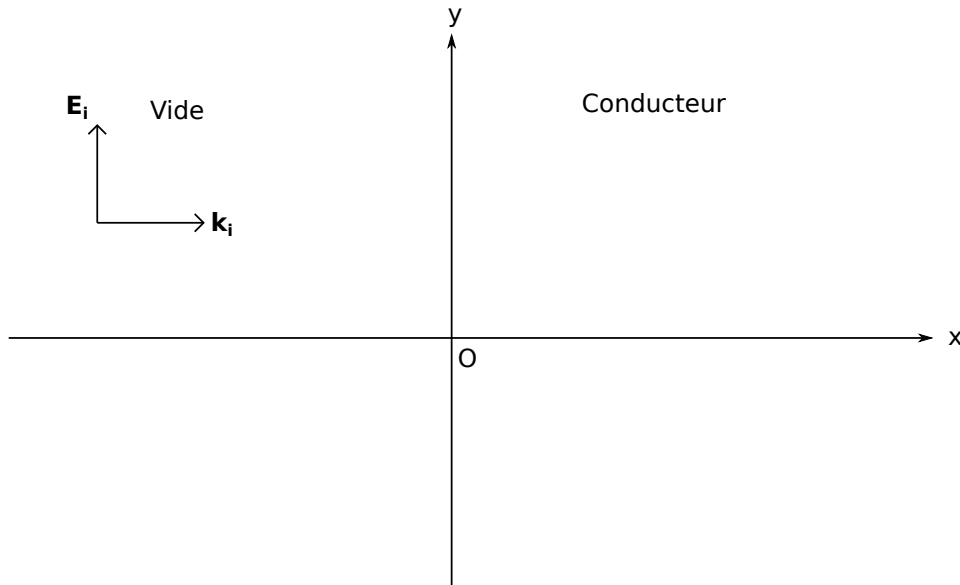
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \quad (25)$$

Le champ magnétique est donc tangent à la surface, perpendiculaire au courant surfacique et son intensité est proportionnelle à celle du courant surfacique.

2. Réflexion sur un conducteur parfait

2.a. Onde incidente et onde réfléchie

On considère une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne, se propageant dans le vide, et rencontrant la surface plane (infinie) d'un conducteur parfait.



La direction de propagation est l'axe x , perpendiculaire à la surface du conducteur. Par convention, on place l'origine ($x = 0$) sur la surface. La direction de polarisation est l'axe y . Voici le champ électromagnétique de l'onde incidente :

$$\underline{E}_{iy} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (26)$$

$$\underline{B}_{iz} = \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} \quad (27)$$

Le nombre d'onde et la pulsation sont reliés par la relation de dispersion dans le vide $k = \omega/c$.

On voit que le champ électrique sur la surface du conducteur ($x = 0$) n'est pas nul et qu'il est tangent à la surface. Or d'après la relation (24) le champ électrique sur la surface d'un conducteur parfait doit avoir une composante tangentielle nulle. On en déduit que le champ de l'onde incidente ne peut satisfaire la condition limite sur le conducteur parfait. On est donc amené à introduire une onde réfléchie. La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie doit vérifier la condition limite sur le conducteur parfait :

$$\underline{E}_{iy}(0, t) + \underline{E}_{ry}(0, t) = 0 \quad (28)$$

Physiquement, il y a une onde réfléchie de forme bien déterminée. On essaye de la trouver en faisant les hypothèses les plus simples : l'onde réfléchie se propage en sens inverse de l'onde incidente, avec la même pulsation et la même polarisation. Son champ électromagnétique s'écrit donc :

$$\underline{E}_{ry} = rE_0 e^{i(-kx-\omega t)} \quad (29)$$

$$\underline{B}_{iz} = -\frac{rE_0}{c} e^{i(-kx-\omega t)} \quad (30)$$

où l'on a introduit le coefficient de réflexion r du champ électrique, défini comme le rapport des champs complexes sur la surface.

La condition d'annulation de la composante tangentielle du champ électrique sur la surface s'écrit alors :

$$E_0(1+r)e^{-i\omega t} = 0 \quad (31)$$

On en déduit le coefficient de réflexion $r = -1$. L'onde réfléchie a donc la même amplitude que l'onde incidente. Il s'agit d'une réflexion totale.

2.b. Courant de surface

Le champ magnétique sur la surface du conducteur est :

$$\underline{B}_z = \underline{B}_{iz} + \underline{B}_{rz} = \frac{2E_0}{c} e^{i(\omega t)} \quad (32)$$

Le champ magnétique n'est pas nul sur la surface et il est tangent à la surface. Cela est compatible avec la relation (25) à condition d'introduire un courant surfacique. Celui-ci est perpendiculaire à la fois à la normale et au champ magnétique, il est donc dans la direction y . On obtient en reportant dans la relation (25) :

$$j_{sy}(t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \quad (33)$$

Physiquement, ce courant de surface est causé par le champ électrique de l'onde incidente, qui met en mouvement les électrons du métal dans la direction y . Le courant de surface est aussi la cause physique de l'onde réfléchie.

2.c. Onde stationnaire

Considérons le champ électromagnétique de l'onde résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie (qui vérifie l'équation des ondes dans le vide) :

$$\underline{E}_y = 2iE_0 \sin(kx)e^{-i\omega t} \quad (34)$$

$$\underline{B}_z = \frac{E_0}{c} \cos(kx)e^{-i\omega t} \quad (35)$$

Le champ électromagnétique réel est donc :

$$E_y = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \quad (36)$$

$$B_z = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (37)$$

Chacun des champs est de la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$, produit d'une fonction de x par une fonction du temps. Il s'agit d'une *onde stationnaire*.

Cette onde stationnaire comporte des plans où le champ électrique est nul en permanence. Ce sont les nœuds du champ électrique, dont la position est donnée par la condition suivante (p est un entier) :

$$kx = -p\pi \quad (38)$$

ce qui donne :

$$x = -p\frac{\lambda}{2} \quad (39)$$

Il y a bien sûr un nœud sur la surface du conducteur et les nœuds (qui sont des plans) sont espacés d'une demi longueur d'onde.

▷ Exercice : Déterminer les nœuds du champ magnétique.

La simulation [Réflexion d'une onde sinusoïdale](#) montre l'onde résultante pour un coefficient de réflexion quelconque. Pour le cas du champ électrique et du conducteur parfait $r = -1$. Pour obtenir le cas du champ magnétique, il suffit d'utiliser $r = 1$.

L'animation [onde électromagnétique stationnaire](#) montre l'évolution des champs électrique et magnétique pour différents types de polarisation.

2.d. Bilan de puissance

La puissance surfacique moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x \quad (40)$$

Celle de l'onde réfléchie est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{|r|^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x = -\langle \vec{\Pi}_i \rangle \quad (41)$$

On définit le coefficient de réflexion en puissance comme le rapport du flux d'énergie moyen réfléchi sur le flux incident :

$$R = |r|^2 = 1 \quad (42)$$

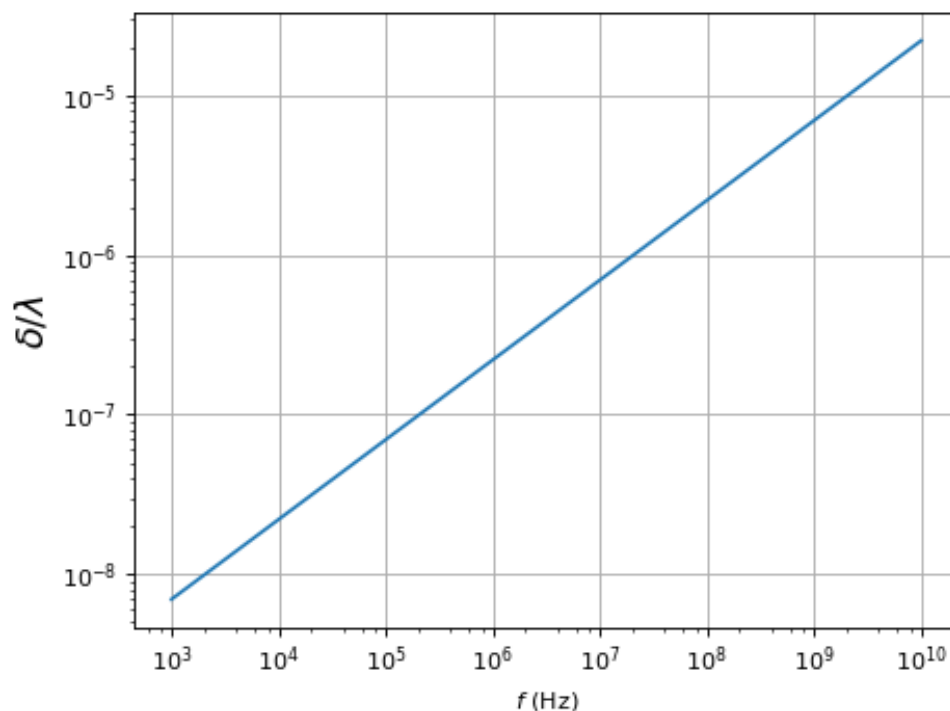
Le conducteur parfait réfléchit entièrement la puissance de l'onde incidente (en moyenne). Cela montre qu'il n'y a pas d'énergie dissipée dans un conducteur parfait. Le courant de surface ne conduit à aucune perte dissipative.

2.e. Conducteur réel

Dans un conducteur réel, la profondeur de pénétration δ n'est pas nulle. Le courant électrique est localisé sur une épaisseur de l'ordre de δ , ce qui conduit à une petite perte dissipative. Pour caractériser le comportement d'un conducteur réel, on introduit le rapport de la profondeur de pénétration sur la longueur d'onde dans le vide :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma}} \quad (43)$$

```
u = delta*f/c
figure()
plot(f,u)
xlabel(r'$f$ (\rm Hz)$')
ylabel(r'$\delta/\lambda$', fontsize=16)
xscale('log')
yscale('log')
grid()
```



On constate que ce rapport est très faible (son carré est le rapport du courant de déplacement par le courant de conduction). La simulation [Réflexion sur un conducteur](#) montre l'onde dans le métal en fonction du rapport δ/λ . Lorsque ce rapport tend vers zéro, le coefficient de réflexion tend vers 1. En pratique, une valeur de 10^{-4} donne déjà une réflexion quasi totale. Le modèle du conducteur parfait est donc adapté aux conducteurs métalliques réels dans le domaine des radio-fréquences et des micro-ondes. Pour ces fréquences, une plaque métallique se comporte comme un conducteur parfait. Cela n'est plus vrai dans le domaine des infrarouges et du visible, car la conductivité des métaux dans ce domaine de fréquence chute notablement. Néanmoins, une surface métallique polie est un bon réflecteur dans le domaine du visible (en général le coefficient de réflexion est de l'ordre de 0,9).

3. Cavité électromagnétique

3.a. Introduction

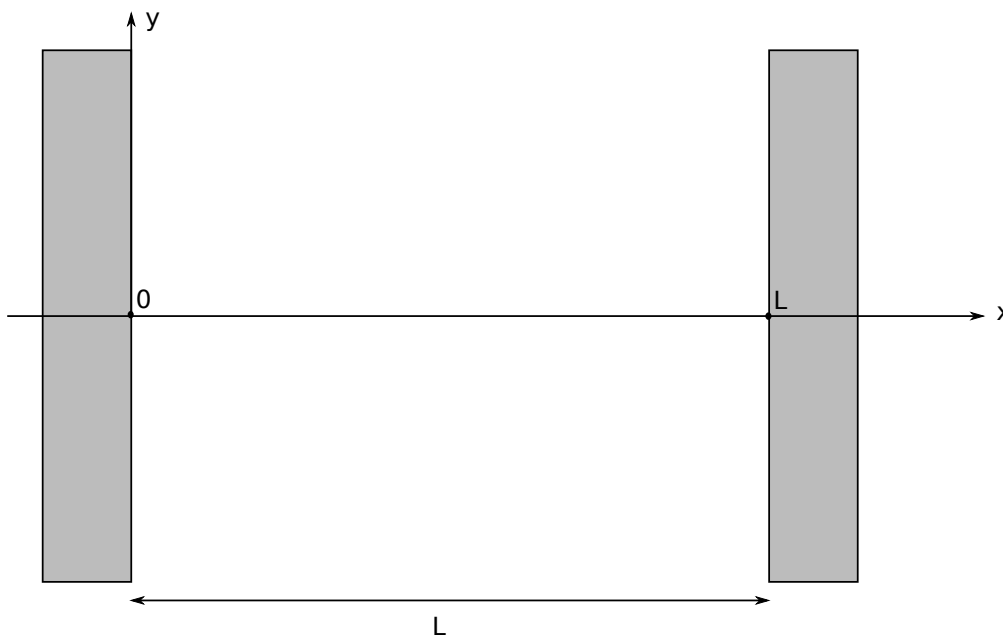
Une cavité électromagnétique est une enceinte délimitée par des parois conductrices. Différentes formes sont possibles (rectangulaire, cylindrique, etc.). L'enceinte peut être en partie ouverte. Lorsqu'une onde électromagnétique est émise par une antenne située dans la cavité, il se produit un phénomène de résonance pour certaines fréquences, ce qui amplifie l'émission pour ces fréquences.

Les cavités résonantes sont utilisées dans le domaine des micro-ondes (par exemple dans le [magnétron](#)) et dans les lasers. Dans un laser, les atomes qui émettent la lumière sont à l'intérieur de la cavité.

3.b. Cavité à une dimension sans perte

Définition

On s'intéresse ici à un modèle simple de cavité sans perte à une dimension. Elle est constituée de deux conducteurs parfaits dont les surfaces planes sont parallèles. Si x est l'axe perpendiculaire aux conducteurs, la cavité est invariante par translation dans les directions y et z .



On note L la longueur de la cavité et les surfaces des conducteurs sont placées en $x = 0$ et $x = L$.

Si le milieu de propagation est le vide, le champ électrique doit vérifier l'équation des ondes. On se limite à une polarisation rectiligne dans la direction y . L'équation des ondes s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (44)$$

La composante tangentielle du champ électrique doit être nulle sur les surfaces des conducteurs parfaits. On a donc les conditions limites suivantes :

$$E_y(0, t) = E_y(L, t) = 0 \quad (45)$$

Ce problème est analogue à celui d'une corde vibrante de longueur L dont les deux extrémités sont maintenues fixes. L'équation différentielle vérifiée par le déplacement vertical de la corde est l'équation des ondes.

Modes propres

Un mode propre est une solution sinusoïdale de la forme suivante :

$$\underline{E}_y(x, t) = f(x)e^{-i\omega t} \quad (46)$$

En reportant cette expression dans l'équation des ondes, on obtient une équation différentielle pour la fonction f :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad (47)$$

avec :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (48)$$

La solution générale de cette équation est :

$$f(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (49)$$

La condition $f(0) = 0$ impose $B = 0$. La condition $f(L) = 0$ impose :

$$kL = p\pi \quad (50)$$

où p est un entier strictement positif. Cette condition s'écrit aussi :

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{p} \quad (51)$$

Finalement, les modes propres sont des ondes stationnaires :

$$E_y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (52)$$

La demi-longueur d'onde doit être un sous-multiple de la longueur de la cavité. La même condition peut être exprimée avec la pulsation :

$$\omega = p \frac{c\pi}{L} \quad (53)$$

La pulsation d'un mode propre est donc multiple d'une pulsation fondamentale. Le mode fondamental est obtenu pour $p = 1$.

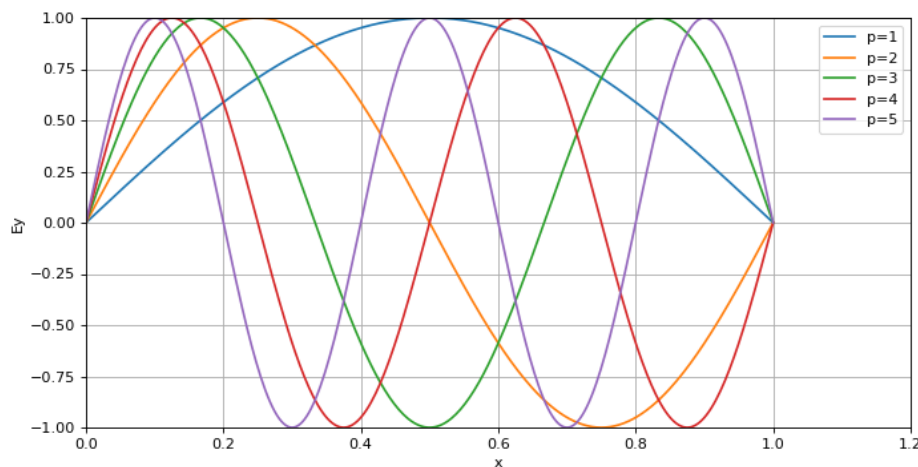
Voici le tracé des 5 premiers modes (on trace la fonction f) :

```
def f(p, x):
    k = p*math.pi
    return numpy.sin(k*x)
figure()
x = numpy.linspace(0.0, 1.0, 300)
figure(figsize=(10, 5))
```

```

plot(x, f(1, x), label='p=1')
plot(x, f(2, x), label='p=2')
plot(x, f(3, x), label='p=3')
plot(x, f(4, x), label='p=4')
plot(x, f(5, x), label='p=5')
xlabel('x')
ylabel('Ey')
legend(loc='upper right')
axis([0, 1.2, -1, 1])
grid()

```



On remarque que le mode p comporte $p + 1$ nœuds.

La solution générale est une combinaison linéaire de modes propres. La simulation [Modes propres d'une cavité sans perte](#) permet de superposer différents modes propres. La superposition de modes propres n'est pas une onde stationnaire.

On remarque aussi que le mode propre est identique à l'onde stationnaire obtenue par réflexion d'une onde progressive sur un plan conducteur (à un déphasage temporel près). Un mode dans la cavité peut être vu comme la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude mais se propageant en sens inverse.

3.c. Cavité résonante

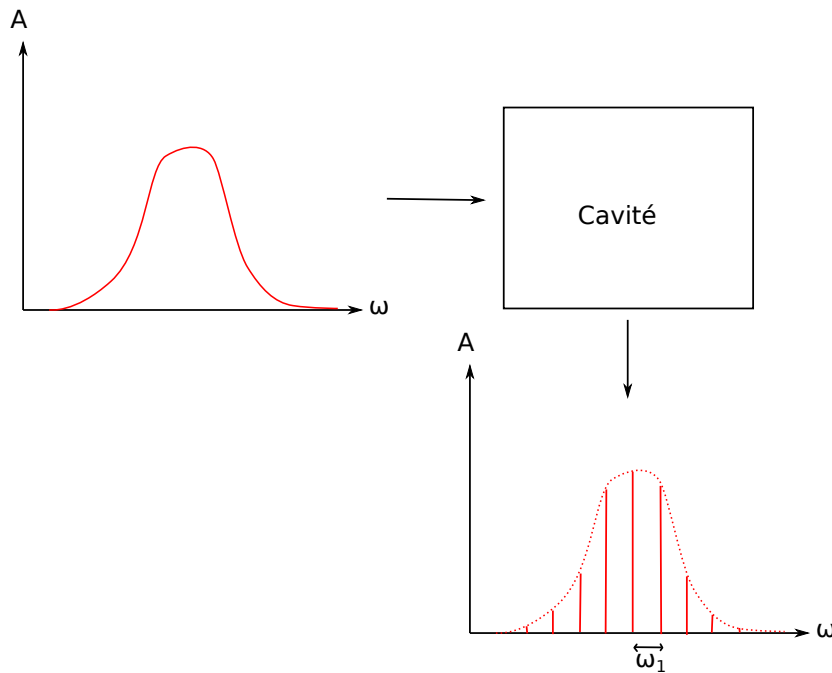
La cavité sans perte constitue un oscillateur auto entretenu. Un analogue électrocinétique est le circuit LC (sans résistance), qui oscille à la pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (54)$$

Ce circuit ne comporte qu'une seule pulsation propre, alors que la cavité en comporte une infinité.

En réalité, il y a toujours de la dissipation dans un circuit électrique et un modèle plus pertinent est celui du circuit RLC . Ce circuit ne peut osciller sans apport d'énergie que sur un temps très court. Il en est de même des cavités électromagnétiques, qui sont le siège de dissipations (principalement dans les conducteurs). Dans une cavité réelle, les modes propres s'atténuent rapidement à cause de cette dissipation.

Les cavités électromagnétiques peuvent être utilisées en tant que *cavités résonantes*, comme un circuit *RLC* auquel on soumet une tension sinusoïdale externe, qui entre en résonance lorsque la pulsation de la tension est égale à la pulsation propre. Les cavités électromagnétiques peuvent avoir un facteur de qualité très élevé (plusieurs milliers), ce qui en fait des filtres extrêmement sélectifs. La figure suivante montre le principe d'action sur un signal dont le spectre est beaucoup plus large que la pulsation fondamentale ω_1 de la cavité.



Le spectre de l'onde obtenue comporte des raies très fines (quasi monochromatiques). La cavité d'un laser permet d'obtenir ce type de spectre. En sélectionnant une des raies obtenues, on peut obtenir une lumière monochromatique. Si l'on garde toutes les raies, on obtient un laser qui délivre des paquets d'onde. Les paquets se répètent périodiquement à la pulsation ω_1 . Ils sont d'autant plus courts que le spectre est étalé autour de sa pulsation centrale. Lorsque le paquet ne comporte que quelques oscillations du champ, on parle d'impulsion ultra-courte. La simulation [Paquet d'onde et dispersion](#) montre les paquets d'onde obtenus de cette manière.

4. Annexe : relations de passage du champ électromagnétique

Les relations de passage du champ électromagnétique à travers une surface séparant deux milieux se démontrent avec les équations de Maxwell. On les donne ici sans démonstration et elles ne sont pas à mémoriser.

Soit une surface séparant deux milieux (1) et (2) et \vec{n}_{12} le vecteur normal unitaire en un point P de cette surface, orienté de 1 vers 2. Lorsqu'une densité de charge surfacique est présente au point P , le champ électrique présente une discontinuité qui s'écrit :

$$\vec{E}_2(P) - \vec{E}_1(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad (55)$$

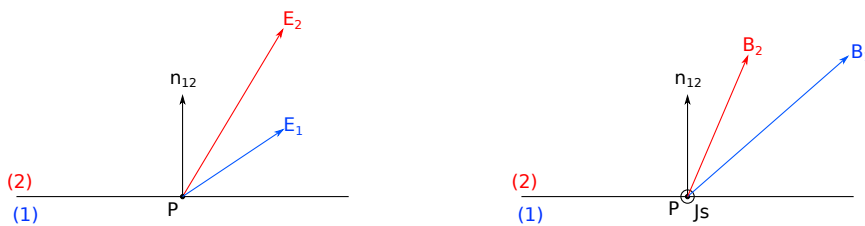
Cette discontinuité est perpendiculaire à la surface. La composante tangentielle du champ électrique est donc toujours continue. Lorsque la densité volumique de charge est finie en tout

point, il n'y a pas de densité surfacique de charges et le champ électrique est continue à travers l'interface.

En présence d'un courant de surface de densité $\vec{J}_s(P)$, le champ magnétique présente une discontinuité qui s'écrit :

$$\vec{B}_2(P) - \vec{B}_1(P) = \mu_0 \overrightarrow{J_s(P)} \wedge \vec{n}_{12} \quad (56)$$

Cette discontinuité est tangente à la surface. La composante normale du champ magnétique est donc toujours continue. Lorsque la densité de courant électrique volumique est finie en tout point, il n'y a pas de densité surfacique de courant et le champ magnétique est continue à travers l'interface.



En pratique, les charges et les courants surfaciques sont utilisés lorsqu'un des deux milieux est un conducteur parfait, ou bien lorsque les charges et les courants sont réparties sur une épaisseur négligeable.